Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
Кафедра техники и электрофизики высоких напряжений

Паспорт экзамена

по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», 3 семестр

1. Методика оценки

Экзамен проводится в письменной форме, по билетам. Билет состоит из двух вопросов и двух задач и формируется по следующему правилу:

- первый вопрос выбирается из диапазона вопросов 1-11;
- второй вопрос из диапазона вопросов 12-22;
- третий вопрос – задача из диапазона задач 1-11;
- четвертый вопрос – задача из диапазона задач 12-25.

Таким образом, проверяются результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с установленными в программе индикаторами достижения компетенций.

На экзамене преподаватель вправе задавать студенту уточняющие и дополнительные вопросы из общего перечня (п. 4).

Форма экзаменационного билета

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет ФЭН

Билет № _____
к экзамену по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

---

1. Вопрос 1. Понятие случайной величины. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины. Функция распределения, её свойства.
2. Вопрос 2. Основные задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Виды выборки и методы отбора.
3. Задача 1. Прибор состоит из четырёх узлов – первого, второго, третьего и четвёртого, которые за время τ работы прибора могут независимо выходить из строя. Надёжность (вероятность безотказной работы) i-го узла равна p_i; вероятность отказа $q_i = 1 - p_i$ (i = 1,2,3,4). Найти вероятности следующих событий: D = {отказало ровно два узла из четырёх}; E = {отказало не менее двух узлов}; F = {отказал хотя бы один узел}.
4. Задача 2. Двумерная случайная величина имеет плотность распределения:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} \le 1 \\ 0, & \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} > 1 \end{cases}$$

Найти плотности распределения компонент X и Y.

Утверждаю: зав. кафедрой ____ _____ должность, ФИО
(подпись)
(дата)

2. Критерии оценки результатов обучения, соотнесенных с уровнями освоения индикаторов достижения компетенций

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **продвинутом** уровне, если студент проводит сравнительный комплексный анализ материала, выявляет проблемы, предлагает механизмы их решения, представляет количественные характеристики определенных процессов, приводит конкретные примеры, не допускает ошибок и способен обосновать выбор метода решения задач. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций не содержит пробелов. Установленные в программе компетенции сформированы в полном объеме. Оценка составляет *от 35 до 40 баллов.*

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **базовом** уровне, если студент при ответе на вопросы формулирует основные понятия, дает характеристику процессов, явлений, проводит анализ причин, условий, способен представить количественные и качественные характеристики процессов, не допускает существенных ошибок при решении задач. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит несущественные пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на базовом уровне. Оценка составляет *от 34 до 27 баллов.*

Ответ на экзаменационный билет засчитывается на **пороговом** уровне, если студент при ответе на вопросы дает определение основных понятий, может показать причинно-следственные связи явлений, при решении задач допускает непринципиальные ошибки, например, вычислительные. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит пробелы. Установленные в программе компетенции сформированы на пороговом уровне. Оценка составляет *от* 26 *до 20 баллов.*

Ответ на экзаменационный билет считается **неудовлетворительным** (ниже порогового уровня), если студент при ответе на вопросы не дает определений основных понятий, не способен показать причинно-следственные связи явлений, при решении задач допускает принципиальные ошибки. Совокупность результатов обучения по дисциплине и соотнесенных с ними индикаторов достижения компетенций содержит существенные пробелы. Установленные в программе компетенции не сформированы. Оценка составляет *менее* 20 *баллов.*

3. Шкала оценки

Экзамен считается сданным, если сумма баллов по всем заданиям билета составляет от 20 до 40 баллов включительно. Сумма менее 20 баллов признается неудовлетворительным результатом промежуточной аттестации по дисциплине.

В общей оценке по дисциплине экзаменационные баллы учитываются в соответствии с правилами балльно-рейтинговой системы, установленными в НГТУ.

4. Вопросы и задачи к экзамену по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

1. Случайное событие. Испытание. События достоверные и невозможные, совместные и несовместные. Полная группа событий. Противоположные события.
2. Пространство элементарных событий. Определение случайного события. Операции над событиями. Основные отношения между событиями.
3. Понятие соединения. Перестановки. Сочетания. Размещения.
4. Классическое определение вероятности события. Статистическое определение вероятности события. Геометрическая вероятность.
5. Условная вероятность. Зависимые события и независимые события. Теорема умножения вероятностей.

6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
7. Схема Бернулли. Формула Бернулли (доказательство на примере). Наивероятнейшее число появлений события в схеме Бернулли. Вероятность наступления хотя бы одного события.
8. Понятие случайной величины. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины. Функция распределения, её свойства.
9. Непрерывная случайная величина. Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их свойства.
10. Функция одной случайной величины, её определение и плотность распределения.
11. Понятие многомерной случайной величины. Функция распределения двумерной случайной величины, её свойства. Вероятность попадания в прямоугольник.
12. Условные распределения компонент двумерной случайной величины и их свойства. Формула умножения законов распределения. Независимые и зависимые случайные величины.
13. Математическое ожидание случайной величины, его свойства.
14. Дисперсия случайной величины, её свойства. Среднее квадратическое отклонение. Центрированные и нормированные случайные величины.
15. Математическое ожидание и дисперсия функции одной и функции двух случайных величин.
16. Корреляционный момент и коэффициент корреляции системы двух случайных величин. Свойства коэффициента корреляции. Вероятностный смысл линейной корреляции и зависимости случайных величин.
17. Равномерное распределение случайной величины, его числовые характеристики.
18. Показательное распределение, его числовые характеристики.
19. Функция Лапласа, её свойства. Вероятность попадания в интервал случайной величины, распределённой по нормальному закону.
20. Основные задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Виды выборки и методы отбора.
21. Показатели надёжности невосстанавливаемых объектов.
22. Вероятностные модели расчёта надёжности. Последовательное соединение объектов. Параллельное соединение объектов. Метод минимальных путей и сечений.

1. Группа студентов состоит из a - отличников, b - хорошо успевающих и c - занимающихся слабо. Отличники на предстоящем экзамене могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена наугад вызывается один студент. Найти вероятность события A = {студент получит хорошую или отличную оценку}.
2. На пересдачу экзамена пришли два студента. Первый выучил 15 вопросов из 20 вопросов программы, а второй только половину. Каждому из них задают по одному вопросу. Найти вероятность того, что экзамен сдаст: а) только один студент; б) оба сдадут.
3. Прибор состоит из четырёх узлов – первого, второго, третьего и четвёртого, которые за время τ работы прибора могут независимо выходить из строя. Надёжность (вероятность безотказной работы) i-го узла равна p_i; вероятность отказа $q_i = 1 - p_i$ (i = 1,2,3,4). Найти вероятности следующих событий: A = {все узлы работают безотказно}; B = {первый узел отказал, остальные нет}; C = {один из узлов отказал, остальные нет}.
4. Какой вариант игры в шахматы с равносильным партнёром является более вероятным: вариант «3 из 4» (выиграть три партии их четырёх) или вариант «5 из 8» (выиграть 5 партий из 8). Доказать через вычисление вероятностей событий «3 из 4», «5 из 8».
5. Во дворце бракосочетания в течении одного года было зарегистрировано шесть браков. Известно, что в течение года в среднем 10% браков заканчиваются разводом.

Найти вероятность того, что этих пар: а) ни одна не разведётся; б) одна разведётся; в) хотя бы одна разведётся; г) две разведутся; д) хотя бы две разведутся; е) все разведутся.

6. Известно, что 5% клещей данной местности являются носителями вируса энцефалита. В медицинское учреждение обратилось 8 человек с укусом клеща, которого после извлечения сдали на исследование. Найти вероятность того, что этих пар: а) все клещи были безвредными; б) не менее двух человек будут инфицированы.

7. Прибор состоит из четырёх узлов – первого, второго, третьего и четвёртого, которые за время τ работы прибора могут независимо выходить из строя. Надёжность (вероятность безотказной работы) i-го узла равна p_i; вероятность отказа $q_i = 1 - p_i$ (i = 1,2,3,4). Найти вероятности следующих событий: D = {отказало ровно два узла из четырёх}; E = {отказало не менее двух узлов}; F = {отказал хотя бы один узел}.

8. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

x_i	20	40	60	80
p_i	0.1	0.3	0.2	0.4

Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

9. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

x_i	2	4	6	8
p_i	0.4	0.3	0.2	0.1

Вычислить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины.

10. Дана функция распределения F(x) случайной величины.

Вычислить: а) коэффициент а; б) математическое ожидание; в) среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ ax^2, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

11. Дана функция распределения F(x) случайной величины.

Вычислить: а) математическое ожидание; б) среднеквадратическое отклонение этой случайной величины; в) вероятность события X > 1.

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, \mathrm{x} \le 0 \\ \mathrm{x}^2/4\,, 0 < x \le 2 \\ 1, \mathrm{x} > 2 \end{cases}$$

12. Известна матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y).

x_i \ y_i	1	1.5	2
1	1/12	1/24	1/24
2	1/12	1/24	1/24
2.5	1/3	1/6	1/6

Найти ряд распределения каждой компоненты X и Y, их математические ожидания и средние квадратические отклонения, а также коэффициент корреляции r_{xy}.

13. Известна матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y).

x_i \ y_i	10	20	30
50	0.15	0.30	0.15
100	0.10	0.05	0.25

14. Найти ряд распределения каждой компоненты X и Y, их математические ожидания и средние квадратические отклонения, а также коэффициент корреляции r_{xy}.Известна матрица распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y).

x_i \ y_i	1	2	3
1	1/12	1/6	1/4
2	1/12	1/6	1/4

Вычислить коэффициент корреляции r_{xy}.

15. Функция распределения системы случайных величин X и Y определяется по формуле:

$$F(X,Y)=\begin{cases}0, при\ x\le 0\ и\ y\le 0\\(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), x>0\ и\ y>0\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $\{1\le x\le 3, 1\le y\le 2\}$.

16. Функция распределения системы случайных величин X и Y определяется по формуле:

$$F(X,Y)=\begin{cases}0, при\ x\le 0\ и\ y\le 0\\(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), x>0\ и\ y>0\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $\{1\le x\le 3, 1\le y\le 3\}$.

17. Двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно в круге с радиусом 10 см и с центром в начале координат. Вычислить коэффициент корреляции.

18. Двумерная случайная величина распределена равномерно в части круга с радиусом 10 и центром в начале координат, которая находится в первой четверти. Найти математическое ожидание компонент X и Y.

19. Двумерная случайная величина имеет плотность распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}\le 1\\0, & \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}>1\end{cases}$$

Найти плотности распределения компонент X и Y.

20. Двумерная случайная величина имеет плотность распределения:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\\0, & \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1\end{cases}$$

Найти плотности распределения компонент X и Y.

21. Вероятность того, что частица, вылетевшая из радиоактивного источника, будет зарегистрирована счетчиком, равна 0.0001. За время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Найти вероятность того, что счетчик зарегистрировал ровно 3 частицы.

22. Среднее число самолётов, прибывающих в аэропорт за одну минуту, равно двум. Поток самолётов – простейший. Найти вероятность того, что за три минуты прибудут: а) два самолёта; б) менее двух самолётов; в) не менее двух самолётов.

23. Непрерывная случайная величина равномерно распределена на интервале [2; 8]. Найти её математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

24. Интервал движения между автобусами составляет 20 минут. Пассажир приходит на остановку в некоторый момент времени в интервале [0; 20]. Найти вероятность того, что он будет ждать не больше четырёх минут.

25. Рост мужчин подчиняется нормальному закону с параметром математического ожидания 174 см, дисперсия 25. Найти вероятность того, что студент первым вошедший в аудиторию, имеет рост от 168 до 178 см.